

**MEK 4530**

**Stabilitet og knekning av konstruksjoner**

**Høst 2005**

**Prosjektoppgave: Forslag til løsning (skisse)**

**B. Hayman 06.12.2005**

# 1 Innledning

*Dette er kun en skisse – ikke en fullstendig rapport. Inndelingen i avsnitt er bare et forslag – andre inndelinger er også mulige. Her presenteres så langt som mulig en generell løsning som gjelder for alle verdier av parametrene.*

## 1.1 Generelt

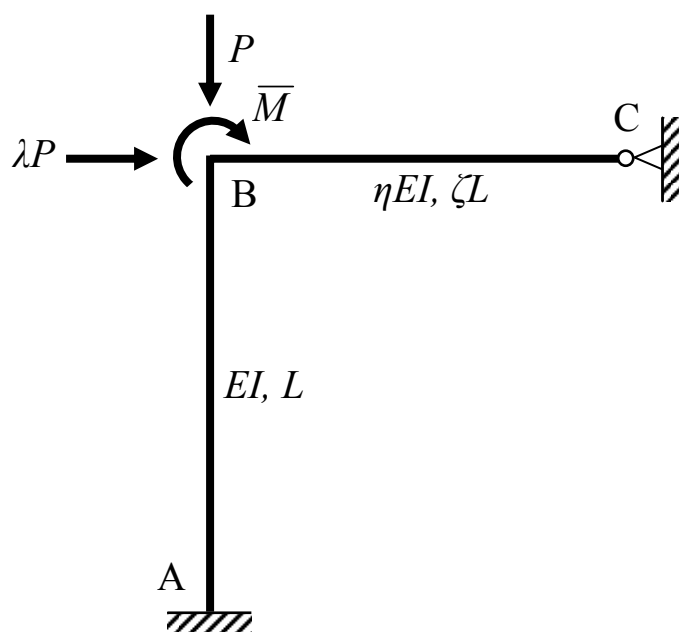
*Den generelle innledningen kunne f.eks. inneholde litt bakgrunn om hvorfor slike problemer er av interesse.*

## 1.2 Problembeskrivelse

*Følgende bør tilpasses det enkelte prosjektet:*

Hver oppgave består av to hoveddeler Del 1 og Del 2 som definert nedenfor. Rammen som skal undersøkes er vist i figur 1. Parameterene  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  antas å ha følgende verdier:

Navn	$\zeta$	$\eta$	$\lambda$
Ismail Aricigil	0.5	1.0	0.5
Frode Fløtten	0.5	0.5	0.75
Erik Hauglin	1.0	1.5	1.5
Hans Olav Heggen	0.75	0.75	1.0
Jean Nounou Kabeya	0.75	1.0	1.5
Tina Kristiansen	0.5	0.5	0.5
Bente Nyhus	0.5	0.5	1.0
Knut Vedeld	0.75	0.75	0.75



Figur 1 Plan ramme

## DEL 1: Egenverdiberegning (knekning)

- Tilnærmet løsning. Beregn laveste egenverdi ved hjelp av en tilnærmet metode, f.eks ved bruk av bjelkefunksjoner.
- Nøyaktig løsning. Beregn nøyaktig verdi for laveste egenverdi
- Sammenlign tilnærmet og nøyaktig løsning og diskuter eventuelt avvik og hva det kan skyldes.

## DEL 2: Bøyeberegning etter 2. ordens linearisert teori

- Beregn fordeling av snittkrefter (bøyemoment og skjærkraft) etter 1. ordens teori.
- Beregn disse også etter 2. ordens teori for økende aksialkrefter representert ved størrelsen  $P$ , med konstant forhold  $\lambda$ . mellom disse kreftene.
- Undersøk spesielt det maksimale bøyemomentet i søylen AB ved forskjellige  $P$ -verdier.
- Resultater skal vises i tabell og figur, uttrykt ved dimensjonsløse størrelser, og skal kommenteres.

### 1.3 Generelle forutsetninger og annen informasjon

Begge elementer anses å ha uendelig stor aksialstivhet. Videre blir skærdeformasjoner neglisjert. Ytre randbetingelser går fram av figur 1.

*Her kan det f.eks. skrives hvilke hjelpemidler som er brukt.*

Følgende informasjon er oppgitt. I elementer med aksialkraft kan maksimalt moment opptre mellom endene selv om elementet kun er påkjent av endemomenter og aksialkraft. Når momentene beregnet etter 2. ordens teori er kjent ved elementets ender, kan et eventuelt maksimalt moment mellom endene beregnes fra differentilligningen, og uttrykkes ved

$$M_{maks} = \left| \frac{\sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu \cos(\pi\sqrt{\alpha_E})}}{\sin(\pi\sqrt{\alpha_E})} M_2 \right|$$

hvor  $\mu$  er definert ved forholdet mellom momentene (med 2. ordens virkning inkludert) ved ende 1 og ende 2 av elementet. Dvs.  $\mu = -M_1/M_2$ . Momentene er definert som positive når de dreier i samme retning (f.eks. med urviseren). For flere detaljer, se Hellesland (1998).

## 2 Symboler

$EA$	aksialstivhet
$EI$	bøyestivhet
$L$	lengde
$M$	totale momenter (inkl. 2. ordens virkning)
$M_{maks}$	det største totale momentet langs en søyle eller bjelke
$M_0$	1. ordens momenter

$\bar{M}$	ytre moment
$N$	aksialkraft i en søyle eller bjelke; velg positive som trykk.
$N_E$	$=\pi^2 EI/L^2$ Eulerlasten for en leddlagret stav
$N_{kr}$	kritisk aksialkraft i en søyle
$N_{kr}$	$=\pi^2 EI/L_e^2$
$P$	ytre last
$f_m$	momentforstørrelsesfaktor (alt., momentforsterkningsfaktor)
$\alpha$	$=N/N_{kr}$ (kalles gjerne stabilitetsindeksen)
$\alpha_E$	$=N/N_E$
$\beta$	knekk lengdefaktor
$\zeta$	Forhold mellom lengder (fig. 1)
$\eta$	Forhold mellom bøyestivheter (fig. 1)
$\lambda$	Forhold mellom aksiallaster (fig. 1)

### 3 Del 1: Egenverdiberegning (knekning)

#### 3.1 Eksakt løsning

Det er fornuftig å bruke stabilitetsfunksjoner som beskrevet i Bergan og Syvertsen (1977) kap. 3. Fortegniskonvensjon og notasjon for forskyvninger og rotasjoner defineres som i figur 3.29 og 3.30.

Rammen har kun to frihetsgrader:  $\theta_B$  og  $\theta_C$ . Den generelle stivhetsrelasjonen for en bjelke eller søyle kan skrives:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 6\phi_5 & -3\ell\phi_2 & -6\phi_5 & -3\ell\phi_2 \\ -3\ell\phi_2 & 2\ell^2\phi_3 & 3\ell\phi_2 & \ell^2\phi_4 \\ -6\phi_5 & 3\ell\phi_2 & 6\phi_5 & 3\ell\phi_2 \\ -3\ell\phi_2 & \ell^2\phi_4 & 3\ell\phi_2 & 2\ell^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

der

$$\phi_1 = \beta \cot \beta$$

$$\phi_2 = \frac{1}{3} \frac{\beta^2}{1 - \phi_1}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4} \phi_1 + \frac{3}{4} \phi_2$$

$$\phi_4 = -\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{3}{2} \phi_2$$

$$\phi_5 = \phi_1 \phi_2$$

$$\beta = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

For søyle AB er alle frihetsgrader lik null bort sett fra  $v_4 = \theta_B$ . Da er

$$S_4 = M_{BA} = \frac{4EI}{L} \phi_3 \theta_B$$

For rigelen BC er  $v_1 = v_3 = 0$ ,  $v_2 = \theta_B$ ,  $v_4 = \theta_C$  og

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \frac{2\eta EI}{\zeta L} \begin{bmatrix} 2\phi'_3 & \phi'_4 \\ \phi'_4 & 2\phi'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

hvor en merke betyr at  $\phi$  er beregnet med aksialkraft  $\lambda P$ , lengde  $\zeta L$  og stivhet  $\eta EI$ .

Stivhetsrelasjonen for systemet blir da:

$$\begin{bmatrix} M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \frac{2\eta EI}{\zeta L} \begin{bmatrix} 2\left(\phi'_3 + \frac{\zeta}{\eta}\phi_3\right) & \phi'_4 \\ \phi'_4 & 2\phi'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

Den kritiske lasten er gitt ved å sette determinanten lik null. Dette gir forholdet for at ligningene skal ha ikke-triviell løsning når  $M_B = M_C = 0$ .

Resultatet blir

$$4\phi'_3\left(\phi'_3 + \frac{\zeta}{\eta}\phi_3\right) - (\phi'_4)^2 = 0$$

Dette kan løses enten grafisk eller numerisk, f.eks. ved bruk av Newton-Raphson. Resultatene er gitt i tabellen nedenfor:

Navn	$\zeta$	$\eta$	$\lambda$	Nøyaktig løsning			Tilnærmet	Forhold til./nøy.
				$\beta$	$\alpha_E$	$P_{kr}L^2/EI$	$P_{kr}L^2/EI$	
Ismail Aricigil	0.5	1.0	0.5	1.877	1.427	14.09	27.60	1.96
Frode Fløtten	0.5	0.5	0.75	2.355	2.248	22.19	30.96	1.40
Erik Hauglin	1.0	1.5	1.5	1.064	0.459	4.53	9.00	1.99
Hans Olav Heggen	0.75	0.75	1.0	1.991	1.607	15.86	20.46	1.29
Jean Nounou Kabeya	0.75	1.0	1.5	1.350	0.739	7.29	12.51	1.72
Tina Kristiansen	0.5	0.5	0.5	2.457	2.447	24.15	36.55	1.51
Bente Nyhus	0.5	0.5	1.0	2.236	2.026	19.99	26.60	1.33
Knut Vedeld	0.75	0.75	0.75	2.173	1.914	18.89	24.78	1.31

### 3.2 Tilnærmet løsning

Den enkleste tilnærmede løsningen bruker Rayleigh-Ritz med bjelkefunksjonene som beskrevet i Bergan og Syvertsen (1977).

Tverrforskyvningen for et enkelt element uttrykkes tilnærmet ved 4 formfunksjoner:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{c}$$

der formfunksjonene er de samme som bjelkefunksjonene:

$$\boldsymbol{\varphi}^T = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 1 \\ -x\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \\ -2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \\ \frac{x^2}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \end{bmatrix}$$

og koeffisientene er lik frihetsgradene ved endepunktene

$$\mathbf{c} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$$

Det kan vises at likevekt er tilnærmet gitt ved

$$(\mathbf{K} - P\mathbf{K}_G)\mathbf{c} = \mathbf{S}$$

hvor

$$\mathbf{K} = \int_{\ell} EI(\boldsymbol{\varphi}'')^T \boldsymbol{\varphi}'' dx, \quad \mathbf{K}_G = \int_{\ell} (\boldsymbol{\varphi}')^T \boldsymbol{\varphi}' dx$$

og  $\boldsymbol{\varphi}'$  betyr derivasjon med hensyn på  $x$ .

For en uniform bjelke eller søyle er matrisene  $\mathbf{K}$  og  $\mathbf{K}_G$  gitt ved

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 6 & -3\ell & -6 & -3\ell \\ -3\ell & 2\ell^2 & 3\ell & \ell^2 \\ -6 & 3\ell & 6 & 3\ell \\ -3\ell & \ell^2 & 3\ell & 2\ell^2 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{K}_G = \frac{1}{30\ell} \begin{bmatrix} 36 & -3\ell & -36 & -3\ell \\ -3\ell & 4\ell^2 & 3\ell & -\ell^2 \\ -36 & 3\ell & 36 & 3\ell \\ -3\ell & -\ell^2 & 3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$  er den vanlige, lineære stivhetsmatrisen og  $\mathbf{K}_G$  er en geometrisk stivhetsmatrise som korrigerer for effekten av en aksialkraft.

Stivhetsrelasjonene for element AB og BC samt den for hele rammen bygges opp på samme måte som ved den eksakte løsningen.

For AB:

$$S_4 = M_{BA} = \left( \frac{4EI}{L} - \frac{4PL}{30} \right) \theta_B$$

For BC:

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{2\eta EI}{\zeta L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda P \eta L}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

For systemet:

$$\begin{bmatrix} M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\left(1 + \frac{\eta}{\zeta}\right) & 2\frac{\eta}{\zeta} \\ 2\frac{\eta}{\zeta} & 4\frac{\eta}{\zeta} \end{bmatrix} - \frac{PL}{30} \begin{bmatrix} 4(1 + \eta\lambda) & -\eta\lambda \\ -\eta\lambda & 4\eta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

Den kritiske lasten gis ved at determinanten er like null. Dette gir

$$\begin{vmatrix} 4\left[1 + \frac{\eta}{\zeta} - \mu(1 + \eta\lambda)\right] & \left(2\frac{\eta}{\zeta} + \mu\eta\lambda\right) \\ \left(2\frac{\eta}{\zeta} + \mu\eta\lambda\right) & 4\left(\frac{\eta}{\zeta} - \mu\eta\lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

hvor

$$\mu = \frac{PL^2}{30EI}$$

dvs, etter litt algebra,

$$\mu^2 [15(\eta\lambda)^2 + 16\eta\lambda] - \mu \left[ 16\frac{\eta}{\zeta} + 36\frac{\eta}{\zeta}\eta\lambda + 16\eta\lambda \right] + \left[ 12\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^2 + 16\frac{\eta}{\zeta} \right] = 0$$

Denne 2. ordens ligningen kan løses direkte. Resultatene vises i tabellen i forrige avsnitt.

### 3.3 Sammenligning og diskusjon

De tilnærmede kritiske lastene ligger ca. 30-100% over de nøyaktige verdiene. Dette skyldes i stor grad det at kun én bjelkefunksjon aktiveres i søylen AB siden denne søylens endepunktene kun har til sammen én frihetsgrad.

Mer nøyaktige løsninger kan oppnås ved å dele AB og BC opp i flere elementer og dermed få flere frihetsgrader.

## 4 Del 2: Bøyeberregning

### 4.1 Beregning av endemomenter og skjærkrefter

For å finne fordeling av bøyemoment og skjærkraft, enten ved 1. eller 2. ordens teori, må man først bruke det forholdet at  $M_C = 0$ . Dette betyr at man må finne  $\theta_B$  og  $\theta_C$  som funksjon av  $\bar{M} = M_B$ . Dette kan gjøres enten ved å invertere den nøyaktige stivhetsmatrisen eller ved å løse de to ligningene direkte:

$$M_B = \bar{M} = \frac{2\eta EI}{\zeta L} \left[ 2\left(\phi'_3 + \frac{\zeta}{\eta}\phi_3\right)\theta_B + \phi'_4\theta_C \right]$$

$$M_C = 0 = \frac{2\eta EI}{\zeta L} [\phi'_4\theta_B + 2\phi'_3\theta_C]$$

Den siste gir at

$$\theta_C = -\frac{\phi'_4}{2\phi'_3}\theta_B$$

Ved en 1. ordens analyse blir dette

$$\theta_C = -\frac{1}{2}\theta_B$$

Ved 2. ordens analyse er

$$\bar{M} = \frac{2\eta EI}{\zeta L} \left[ 2 \left( \phi'_3 + \frac{\zeta}{\eta} \phi_3 \right) - \frac{(\phi'_4)^2}{2\phi'_3} \right] \theta_B$$

Vi kan finne endemomentene for AB ved å skrive søylens stivhetsrelasjon i mer komplett form:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2\phi_3 & \phi_4 \\ \phi_4 & 2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

hvor  $\theta_A = 0$ . Dette gir

$$M_{BA} = \frac{4EI}{L} \phi_3 \theta_B$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \phi_4 \theta_B$$

slik at

$$M_{BA} = \bar{M} \frac{\frac{4EI}{L} \phi_3}{\frac{2\eta EI}{\zeta L} \left[ 2 \left( \phi'_3 + \frac{\zeta}{\eta} \phi_3 \right) - \frac{(\phi'_4)^2}{2\phi'_3} \right]}$$

og

$$M_{AB} = \bar{M} \frac{\frac{2EI}{L} \phi_4}{\frac{2\eta EI}{\zeta L} \left[ 2 \left( \phi'_3 + \frac{\zeta}{\eta} \phi_3 \right) - \frac{(\phi'_4)^2}{2\phi'_3} \right]}$$

$M_{BC}$  kan nå beregnes ved å bruke momentlikevekt ved punkt B:

$$\bar{M} = M_{BA} + M_{BC}$$

Skjærkreftene i AB og BC kan finnes ved å bruke momentlikevekt for de respektive elementene:

$$Q_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L}$$

$$Q_{BC} = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{\eta L}$$

## 4.2 Fordeling av skjærkraft

Skjærkreftene er konstante langs de enkelte elementene AB og BC siden det er ingen tverrkrefter på disse elementene.

## 4.3 Fordeling av bøyemoment

For en 1. ordens analyse kan bøyemomentfordelingen tegnes så snart endemomentene er kjent. Bøyemomentet må variere lineært mellom endemomentene. Det må tas hensyn til



forskjellige fortegnskonvensjoner for endemoment og bøyemoment, se Bergan og Syvertsen (1977) figur 3.6.

For en 2. ordens analyse må man gå tilbake til differensialligningene for de enkelte elementene.

For AB kan differensialligningen skrives:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P}{EI} v = \frac{1}{EI} (Pv_A + M_{AB} - Q_{AB}x)$$

Her er koordinat  $x$  målt fra A. Siden  $v_A = 0$ , er den generelle løsningen gitt ved

$$v = \frac{1}{P} (M_{AB} - Q_{AB}x) + C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

hvor

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

Randbetingelsene ved  $x = 0$  brukes til å finne  $C_1$  og  $C_2$ . Disse gir

$$C_2 = -\frac{M_{BA}}{P}$$

$$C_1 = \frac{Q_{AB}}{kP}$$

Bøyemomentet langs AB er da gitt ved

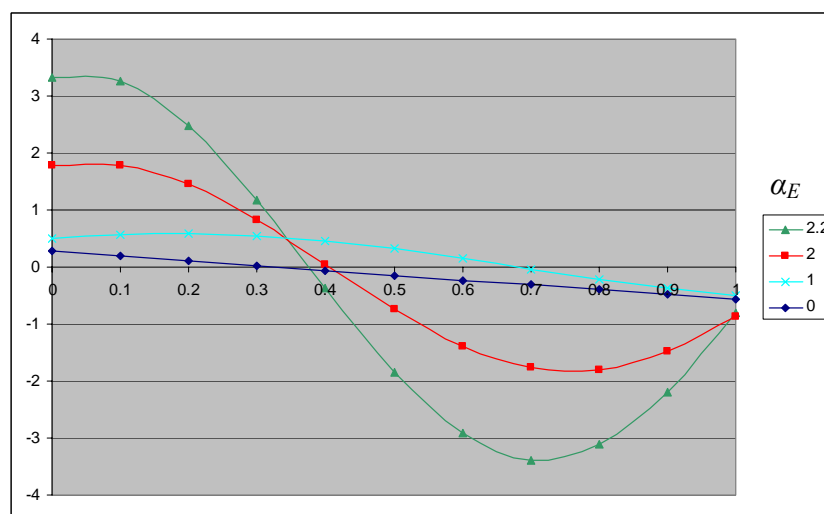
$$M = EIv'' = -k^2 EI (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$$

Dette uttrykket kan gjøres dimensjonsløs ved å sette inn  $C_1$  og  $C_2$  og dele på  $\bar{M}$ :

$$\frac{M}{\bar{M}} = -\frac{Q_{AB}L}{\bar{M}(kL)} \sin kx + \frac{M_{AB}}{\bar{M}} \cos kx$$

Eksempler er vist i figur 2 for tilfellet med  $\zeta = \eta = \lambda = 0.5$

Det foreslås at kurvene tegnes for 3-4 lastnivåer (også for element BC). Se *Anneks A*, som viser resulater fra Tina Kristiansens løsning med samme parametre som her.



Figur 2 Fordeling av bøyemomentet

#### **4.4 Maksimale moment i søyle AB**

Det maksimale momentet i AB (og evt. BC) sjekkes ved bruk of formelen som er gitt i avsn. 1.3. Merk at det største endemomentet kan være enten  $M_{AB}$  eller  $M_{BA}$  avhengig av lastnivået.

### **5 Konklusjon**

*Noen konklusjoner om f.eks:*

- Sammenligning av nøyaktig og tilnærmet løsning for kritisk last
- Formen på bøyemomentdiagrammet ved forskjellige lastnivåer, og lokalisering av maksverdi.

### **6 Sammendrag**

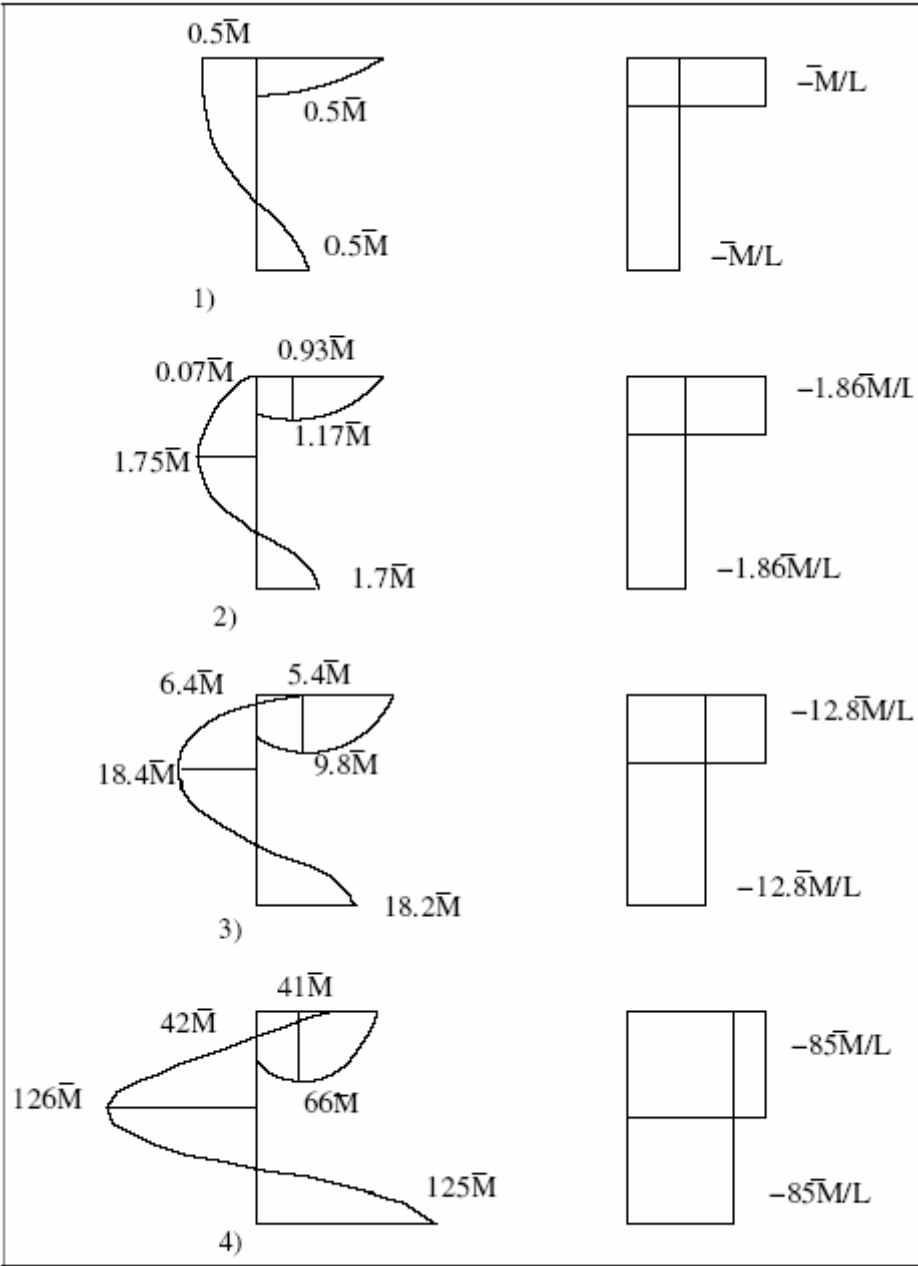
*Kort oppsummering av problemet, resultater og konklusjoner.*

### **7 Referanser**

Bergan, P.G. og Syvertsen, T.G. (1977). "Knekning av søyler og rammer". Tapir.

Hellesland, J. (1998). "Trykkstaver i rammesystemer", NIF kurs: Slanke betongkonstruksjoner – Beregning og dimensjonering. Norske Sivilingeniørers forening.

**Anneks A: Moment- og skjærkraftdiagrammer fra Tina Kristiansens rapport**



Figur 6: 2.ordens M- og V-diagrammer

<b>M</b>	1.orden P=0	$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{2.4\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{2.44\pi^2 EI}{L^2}$
$\mathbf{M}_{BC}$	$\frac{3}{7}M$	$0.50M$	$0.93M$	$6.4M$	$42M$
$\mathbf{M}_{BA}$	$\frac{4}{7}M$	$0.50M$	$0.07M$	$-5.4M$	$-41M$
$\mathbf{M}_{AB}$	$\frac{2}{7}M$	$0.50M$	$1.70M$	$18.2M$	$125M$
$\mathbf{M}_{maks,AB}$	-	-	$-1.75M$	$-18.4M$	$-126M$
$\mathbf{M}_{maks,BC}$	-	-	$1.17M$	$9.8M$	$66M$

Tabell 1: M-verdier

<b>V</b>	1.orden P=0	$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{2.4\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{2.44\pi^2 EI}{L^2}$
$\mathbf{V}_{BC}$	$-\frac{6}{7} \frac{M}{L}$	$-\frac{M}{L}$	$-1.86 \frac{M}{L}$	$-12.8 \frac{M}{L}$	$-85 \frac{M}{L}$
$\mathbf{V}_{AB}$	$-\frac{6}{7} \frac{M}{L}$	$-\frac{M}{L}$	$-1.86 \frac{M}{L}$	$-12.8 \frac{M}{L}$	$-85 \frac{M}{L}$

Tabell 2: V-verdier

B. Hayman  
13.11.2005